

GEOMETRIA FRACTAL EN LA CIENCIA DEL SUELO

Fractal Geometry in Soil Science

Ricardo David Valdez-Cepeda¹ y Emilio Olivares-Sáenz²

RESUMEN

Los puntos de dimensión cero, las líneas y curvas unidimensionales, las figuras planas bidimensionales como los cuadrados y círculos, y los objetos tridimensionales como los cubos y las esferas nos hacen ver al mundo como hasta ahora lo entendemos. Sin embargo, algunos fenómenos naturales son descritos mejor por una dimensión cuyo valor no es precisamente entero, pero sí fracción (fractal). Además, si poseen la propiedad de autosimilitud o autoafinidad dentro de un rango de escalas se define como objeto fractal. En este artículo de revisión se describen y discuten los principios básicos de la geometría fractal, así como algunos ejemplos de su aplicación en la ciencia del suelo con el propósito de facilitar a los científicos del suelo la comprensión de sus conceptos. Al final se indican algunas sugerencias a considerar en futuras investigaciones enmarcadas en la ciencia del suelo.

Palabras clave: *Objetos fractales, funciones variograma y potencial, física de suelos, química de suelos, variabilidad espacial del suelo, agricultura de precisión.*

SUMMARY

Zero dimensional points, unidimensional lines and curves, bidimensional plane figures as squares and circles, and tridimensional objects as cubes and spheres allow us to see the world how we understand it now. However, some natural phenomena are best described by a fractal dimension. Moreover, they are

¹ Universidad Autónoma Chapingo-Centro Regional Universitario Centro Norte, Apartado Postal 196, 98000 Zacatecas, Zac., México.

² Universidad Autónoma de Nuevo León-Facultad de Agronomía, Apartado Postal 358, 66450 San Nicolás de los Garza, N. L., México.

Aceptado: Septiembre de 1998.

fractal objects if they have self-similarity or self-affinity property within a known scale range. In this review, basic principles of fractal geometry and some examples of their application in soil science are described and discussed with the aim to introduce the soil scientists to such concepts. At the end, various perspectives for further research in soil science are pointed out.

Index words: *Fractal objects, power law and variogram function, soil physics, soil chemistry, soil spatial variability, prescription farming.*

INTRODUCCION

“Dios crea círculos, ondas y fractales”

Benoit B. Mandelbrot

La geometría euclidiana, la trigonometría y el cálculo son las herramientas que generalmente se usan para modelar los fenómenos naturales. Los modelos son descritos en términos de puntos, líneas rectas, círculos, parábolas y otras curvas simples. Así, los puntos de dimensión cero, las líneas y curvas unidimensionales, las figuras planas bidimensionales como el cuadrado y el círculo, y los cuerpos tridimensionales como los cubos y las esferas nos hacen ver al mundo como hasta ahora lo entendemos. Sin embargo, algunos fenómenos naturales son descritos mejor por una dimensión cuyo valor no es precisamente entero, en otras palabras, no corresponde a una dimensión euclidiana. Ese valor, entonces, corresponde a una dimensión fractal. La palabra “fractal” proviene del adjetivo “fractus”, en latín, y su significado es irregular o rugoso (Mandelbrot, 1993). Mandelbrot (1977) usó el término “fractal” específicamente para estudiar fenómenos temporales o espaciales continuos que exhiben correlación dentro de un rango de escalas.

Los propósitos fundamentales del presente artículo son: proporcionar al lector los principios básicos de la geometría fractal, y darle a conocer algunos usos que ésta ha tenido en la ciencia del suelo.

PRINCIPIOS BASICOS DE LA GEOMETRIA FRACTAL

La geometría euclidiana y las funciones elementales, tales como el seno, el coseno y los polinomios son la base del método tradicional para analizar datos experimentales (Barnsley, 1993). Una línea recta tiene dimensión uno, mientras que una curva fractal tendrá una dimensión cuyo valor es de entre uno (1) y dos (2), dependiendo del espacio que ésta ocupe en el plano y de su comportamiento en sí (Peterson, 1984).

Si el lector considera que

$$N_n \propto Cr_n^{-D} \quad (1)$$

donde N_n es el número de fragmentos del tamaño r_n , C es una constante, y D es el índice de similitud o dimensión fractal; D puede ser estimada por

$$D = [\log(N_{n+1}/N_n)] / [\log(r_n/r_{n+1})] \quad (2)$$

Por ejemplo, el segmento de longitud unitaria (*i. e.* el iniciador, según Mandelbrot, 1982), mostrado en la Figura 1, puede dividirse en partes mediante procedimientos diferentes:

1) En la Figura 1a, el segmento es primeramente dividido en dos partes, así $r_1=1/2$, y como una de las partes se conserva y la otra se elimina, $N_n=1$ (*i. e.* el patrón generador del objeto fractal, según Mandelbrot, 1982). Posteriormente, la parte del segmento inicial conservada se divide también en dos partes y se conserva una de ellas de manera tal que $r_2=1/4$ y $N_2=1$. En este caso D tiende a ser cero y equivale a la dimensión euclidiana porque siempre $N_n=1$, sin importar el número de iteraciones o veces que se ejecute el proceso de división del segmento y de conservación de una de sus partes; e inclusive, la longitud tiende a aproximarse a cero conforme se incrementa el número de iteraciones.

2) En la Figura 1b el segmento es dividido en dos partes, pero conservándolas. Entonces, $r_1=1/2$ y $N_n=2$. De la siguiente iteración se obtiene $r_2=1/4$ y $N_n=4$. Por lo tanto, $D=\log(2)/\log(2)=1$. El resultado tiene sentido porque la longitud del segmento siempre será unitaria. Es pues fácil crear líneas de dimensión euclidiana. Enseguida, se demuestra que es igual de fácil crear líneas cuya dimensión es fractal.

3) En la Figura 1c el segmento se divide en tres partes iguales y se conservan las dos de los extremos. Así, $r_1=1/3$ y $N_1=2$. Al repetir el proceso, $r_2=1/9$ y $N_2=4$; entonces $D=\log(2)/\log(3)=0.6309$. Este es un fractal desconectado. Además, es el fractal determinístico más

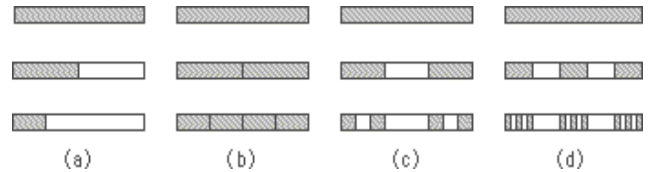


Figura 1. Cuatro procesos de fragmentación de segmentos lineales de longitud unitaria para estimar la dimensión fractal.

simple conocido como “Conjunto de Cantor Triádico” (Barnsley, 1993; Bunde y Havlin, 1994) o “Polvo de Cantor”.

4) Al dividir el segmento en cinco partes iguales y conservando las partes de ambos extremos y la central (Figura 1d), $r_1=1/5$ y $N_1=3$. Al repetir el procedimiento en cada parte conservada, $r_2=1/25$ y $N_2=9$. Así $D=\log(3)/\log(5)=0.6826$.

Pues bien, así como fue posible encontrar dimensiones fractales con valores entre cero (0) y uno (1) para segmentos lineales eliminando partes (fragmentándolos), es factible encontrarlas al invertir el proceso, es decir, al incrementar la longitud del segmento. La “Curva de Koch”, uno de los fractales determinísticos más comunes (Bunde y Havlin, 1994) y así nombrada en honor a Helge von Koch, es un ejemplo ilustrativo (Figura 2) de dicho procedimiento.

La construcción de la “Curva de Koch” (Figura 2) se hace partiendo de una línea recta de longitud unitaria (iniciador) dividiéndola en tres partes iguales. Después se reemplaza la parte central con un triángulo equilátero sin base (patrón generador del objeto fractal), a grado tal que se incrementa la longitud de la línea a $4/3$. Este factor de incremento de longitud de la línea se asocia a cada iteración. Si el fractal es definido considerando un gran número de iteraciones, la longitud de la línea se aproxima al infinito (Sander, 1986; Bunde y Havlin, 1994), mientras que su área es aún nula (cero) (Sander, 1986). La dimensión fractal de la “Curva de Koch” se define por $D=\log(4)/\log(3)=1.2618595$.

Es apreciable el aspecto básico de los fractales determinísticos, “la auto-similitud” (la no variación de la forma al cambiar de escala), inherente en los fractales lineales de las Figuras 1 y 2, pero la complejidad de los mismos se incrementa más en los fractales no lineales, como en el caso del fractal quizás más famoso: el “Conjunto de Mandelbrot”. Particularmente, en la “Curva de Koch” (Figura 2) la auto-similitud se aprecia al verificar que la forma

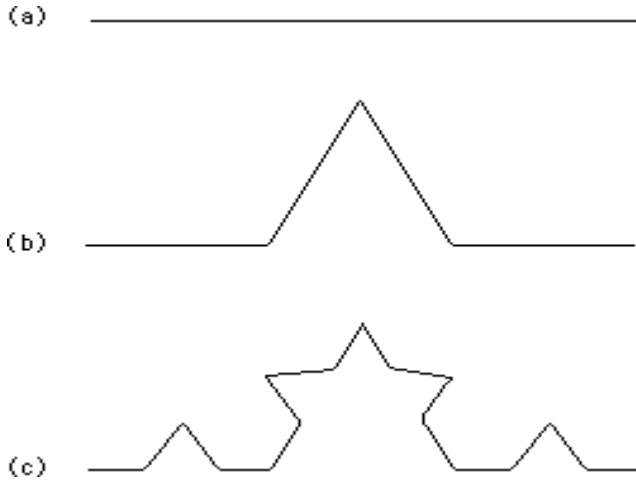


Figura 2. Proceso de generación de la curva de Koch hasta dos (2) iteraciones. a) Una línea de longitud unitaria. b) Una línea de longitud 4/3. c) Una línea de longitud 16/9, es decir, la línea b incrementada en 4/3.

producto de la iteración 1 (Figura 2b) se mantiene en cualquier cuarta parte de la línea producto de la iteración 2 (Figura 2c).

También es posible aplicar los procedimientos de fragmentación a cuadrados, rectángulos y otro tipo de planos para estimar el valor de su respectiva dimensión fractal. Los ejemplos de la Figura 3 parten de un cuadrado de área unitaria (iniciador) y se basan en la división del dicho cuadrado en nueve (9) cuadrados iguales (patrón generador del objeto fractal) con $r_1=1/3$. En la siguiente iteración, cada uno de los cuadrados es dividido también en nueve (9) fragmentos con $r_2=1/9$ cada uno. El proceso iterativo se repite n veces.

1) En la Figura 3a solamente un cuadrado se mantiene en cada iteración, de manera que $N_1=N_n=1$; en consecuencia, $D=0$, es decir, se tiene un ejemplo de la dimensión euclidiana de un punto.

2) En la Figura 3b se mantienen dos cuadrados en la primer iteración, cuatro en la segunda y así sucesivamente; entonces, $N_1=2$, $N_2=4$, etc. y $D=\log(2)/\log(3)=0.6309$. ¡El lector podrá apreciar que es la misma dimensión fractal que la del segmento lineal de la Figura 1c!

3) En la Figura 3c se mantienen tres cuadrados alineados en cada iteración, lo cual permite estimar la dimensión euclidiana de una línea ($D=1$), ya que $N_1=3$ y $N_2=9$.

4) Cuando se remueve o elimina el cuadrado del centro en cada iteración (Figura 3d), $N_1=8$ y $N_2=64$, de manera que la dimensión fractal es 1.8928.

5) Como se supone, si todos los cuadrados se mantienen (Figura 3e), la dimensión es la de un plano euclidiano ($D=2$).

Si el objetivo fuera estimar dimensiones fractales cuyos valores sean de entre dos (2) y tres (3), el procedimiento de fragmentación debería aplicarse tomando como sujeto de análisis a un objeto de volumen unitario, *e. g.* un cubo (Bartoli *et al.*, 1991; Perfect y Kay, 1991; Rieu y Sposito, 1991a; Perfect *et al.*, 1993).

Los ejemplos demostrativos descritos *ut supra* permiten reconocer que en sistemas (objetos) regulares o con densidad uniforme (líneas rectas, planos, y cilindros, cubos y esferas sólidos) la dimensión D caracteriza el cómo la masa $M(L)$ cambia con la magnitud lineal L del sistema (Bunde y Havlin, 1994). Una parte pequeña del sistema de magnitud lineal bL ($b < 1$) tendrá una $M(bL)$ que decrece en atención al factor b^D

$$M(bL) \propto b^D M(L) \tag{3}$$

La solución de esta ecuación es:

$$M(L) \propto CL^D \tag{4}$$

Retomando la “Curva de Koch” (Figura 2) y considerando que el factor de incremento de la longitud es $b=1/3$, se percibe que la longitud (masa) total de la curva se incrementa por un factor de 1/4, *i. e.*

$$M(1/3 L) = 1/4 M(L) \tag{5}$$

De esta manera $1/4 = (1/3)^D$; *i. e.* la dimensión fractal $D = \log(4)/\log(3) = 1.2618595$. ¡El resultado es similar al anteriormente indicado para la “Curva de Koch”!

La aplicación práctica de la dimensión fractal requiere de algunas otras condicionantes, porque las figuras auto-similares (formas invariantes cuando se magnifica isotrópicamente una parte pequeña del objeto al re-escalar los ejes por un factor común) son raramente encontradas en la naturaleza (Mandelbrot, 1967); de manera que generalmente se maneja el concepto de fractales auto-afines para caracterizar a los objetos invariantes cuando se magnifican anisotrópicamente. Las estructuras auto-similares o auto-afines pueden ser exactas o estadísticas. Las variantes estadísticas de auto-similitud y auto-afinidad son las más frecuentes.

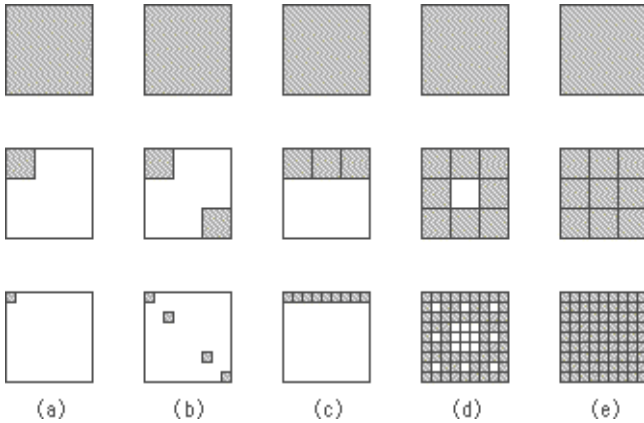


Figura 3. Cinco procesos de fragmentación de cuadrados de área unitaria para estimar la dimensión fractal.

Matemáticamente, la auto-similitud conlleva a una relación potencial entre el tamaño, $M(r)$ y la(s) unidad(es) de medición o escala r (Sander, 1986; Tyler y Wheatcraft, 1989; Young y Crawford, 1991):

$$M(r) \propto Br^D \quad (6)$$

donde B es una constante de proporcionalidad y D el índice de auto-similitud o dimensión fractal.

Esta función potencial y algunas variantes análogas han permitido aplicar los principios de la geometría fractal en las ciencias naturales, especialmente en la ciencia del suelo. Un tipo de esas variantes se ha usado en la descripción y la modelación de las propiedades y procesos edáficos, mientras que otro ha sido de particular importancia en la cuantificación de la heterogeneidad espacial del suelo.

GEOMETRIA FRACTAL EN LA CIENCIA DEL SUELO

Descripción y Modelación de Procesos Edáficos

Estos aspectos de la ciencia del suelo han sido realizados considerando la Ecuación 6 o alguna de sus variantes por analogía. Aunque también, la geometría fractal es una herramienta valiosa para integrar fenómenos biológicos, químicos y físicos dentro de un rango de escalas en espacio y tiempo (Perfect y Kay, 1995), pues los objetos naturales exhiben generalmente simetría y/o afinidad dentro de valores límites (superior e inferior) de escala.

Costas y Fronteras Fractales. Mandelbrot (1967) introdujo la geometría fractal en la geofísica al definir que algunas curvas geográficas son figuras continuas

auto-similares aleatorias con dimensión fractal (D) definida por la relación:

$$L(r) \propto Ar^{1-D} \quad (7)$$

donde L es la longitud o el perímetro, según el caso; r es el tamaño de la unidad de medición; y A es una constante; entonces, L se incrementa conforme r es menor.

A continuación se indican los valores de D para diferentes casos reportados por Mandelbrot (1967). La costa oeste de Gran Bretaña, $D=1.25$; la frontera terrestre de Alemania, $D=1.15$; la frontera terrestre entre España y Portugal, $D=1.14$; la costa de Australia, $D=1.13$; y la costa de Africa del Sur $D=1.02$. Ello significa que la costa oeste de Gran Bretaña y las fronteras terrestres de Alemania y entre España y Portugal son las más irregulares, pero en todas el grado de irregularidad es independiente de la escala y predominan los efectos de segmentos lineales relativamente grandes porque $D < 1.5$. En un contexto práctico entonces, no es necesario medir esas curvas geográficas con unidades de medida pequeñas (*i.e.* mm, cm, m) porque esas escalas no describen aspectos importantes de dichas curvas.

Partículas y Agregados Fractales en el Suelo. Mandelbrot (1982) y Turcotte (1986) sugirieron que la relación fractal para las distribuciones de las partículas o agregados por su tamaño es de la forma

$$N(r > R) \propto R^{-D_n} \quad (8)$$

donde $N(r > R)$ es el número de partículas o agregados de tamaño mayor que R y D_n es la dimensión fractal con base en el número de partículas o agregados.

Desafortunadamente, la variación de la densidad en función del tamaño de las partículas o agregados es raramente reportada (Tyler y Wheatcraft, 1992) a pesar de que el concepto más fácilmente entendido en la geometría fractal es el de densidad, puesto que la relación entre masa y volumen es inconstante conforme se cambia la escala (Orbach, 1986). La cantidad de masa dentro de un cuerpo esférico de radio r para un objeto homogéneo varía de acuerdo con $M(r) \propto Ar^d$, donde A es una constante y d es la dimensión espacial (euclidiana). Análogamente, la cantidad de masa de un cuerpo esférico auto-similar (*i.e.* fractal) varía de acuerdo con

$$M(r) \propto Br^{D_m} \quad (9)$$

donde B es el "índice de lagunaridad" o "índice de agregación de las partículas o agregados" y D_m es la dimensión fractal con base en la masa. Generalmente D es menor que d debido al carácter abierto de las

estructuras fractales, es decir, a la tendencia por exhibir arreglos no homogéneos de sus partículas, con grandes cantidades de espacios abiertos (poros) y arreglos atómicos irregulares. Así, la densidad de partículas de una estructura fractal se estima considerando el volumen $[V(r)=Cr^d]$, donde C es una constante]:

$$\rho(r)=M(r)/V(r)=Br^D/Cr^d \propto r^{D-d} \quad (10)$$

Puesto que D es menor que d, la densidad disminuye conforme se incrementa el tamaño de la escala, lo cual implica que los objetos fractales de gran tamaño pueden ser extraordinariamente livianos (Orbach, 1986).

Algunos investigadores han sugerido que las partículas del suelo se comportan como superficies fractales, lo cual indica que su área (A) se incrementa conforme a su tamaño de acuerdo con

$$A \propto r^{D_s} \quad (11)$$

donde la dimensión fractal superficial, $D_s=2.3$ a 2.5 (Avnir *et al.*, 1985; Sokolowska, 1989). De hecho, Mandelbrot (1982) argumentó que $2 < D_s < D_n$ o $D_m < 3$. Por consiguiente, también se reconoce que la interface sólido-poro en el suelo es un fractal superficial (Bartoli *et al.*, 1991; Anderson y McBratney, 1995), porque el límite entre ambas fases es irregular. Asimismo, Bartoli *et al.* (1991) indicaron que los poros del suelo muestran una relación potencial fractal con su radio circular

$$P(r) \propto r^{D_p} \quad (12)$$

donde P son los poros de radio mayor que r y D_p es la dimensión fractal de la porosidad.

Bartoli *et al.* (1991) señalaron que si $D_m=D_p=D_s=3$, el material no es fractal. Pero si $2 < D_s < 3$ y $D_m=D_p=3$, el material es fractal solamente con base en su área superficial. En cambio si $2 < D_s < 3$, $2 < D_m < 3$ y $D_p=3$, el material es fractal con base en superficie y masa. Y si $2 < D_s < 3$, $2 < D_p < 3$ y $D_m=3$, el material es fractal con base en superficie y porosidad. Matemáticamente, entonces, los agregados interconectados complejos deben ser caracterizados por valores diferentes de dimensión fractal con base en masa y superficie ($D_s \neq D_m$; $2 < D_s < 3$; $2 < D_m < 3$).

Algunas experiencias de partículas y agregados fractales. Turcotte (1986), Tyler y Wheatcraft (1989, 1992), Bartoli *et al.* (1991), Wu *et al.* (1993), Barak *et al.* (1996) utilizaron el concepto de dimensión fractal para caracterizar la distribución de las partículas del suelo por su tamaño; mientras que Perfect y Kay (1991), Perfect *et al.* (1992), Rieu y Sposito (1991b),

Eghball *et al.* (1993), Anderson y McBratney (1995) y Logsdon *et al.* (1996) caracterizaron la distribución de los agregados por su tamaño (Cuadro 1). Teóricamente, los valores de dimensión fractal relativamente bajos indican que el suelo es dominado por partículas o agregados grandes, mientras que valores altos indican la dominancia de partículas o agregados pequeños. En algunos de esos casos, la masa se convirtió a número de partículas o agregados considerando el supuesto típico de que tienen forma esférica o cúbica; sin embargo, ello no se ha comprobado. Otro error asociado a este procedimiento, es el referente a que el número de partículas o agregados se relaciona con el tamaño medio de dos clases sucesivas, es decir, se supone que la distribución de las partículas es discontinua cuando en realidad es continua.

Los resultados de Turcotte (1986) y Tyler y Wheatcraft (1989) no coinciden con respecto a los valores de dimensión fractal, debido posiblemente a la diferencia de las clases representadas por radios medios de las partículas y/o a que la textura de las muestras de suelo estudiadas por Turcotte (1986) eran más cuarzosas. Avnir *et al.* (1985) demostraron que el cuarzo puro y los suelos cuarzo-arenosos revelan valores (de dimensión fractal superficial) relativamente bajos, lo cual indica que predominan las partículas de tamaño relativamente grande en dichos suelos. Bartoli *et al.* (1991) confirmaron que los suelos de textura fina son bien caracterizados por una distribución fractal de las partículas mientras que los cuarzo-arenosos no.

Por su parte, Barak *et al.* (1996) caracterizaron la fracción arenosa de suelos arenosos mediante el análisis de imagen (con lo cual se elimina el supuesto de forma esférica) de los granos de arena y la variante de la Ecuación 11:

$$N(A > a) \propto a^{-D/2} \quad (13)$$

donde $N(A > a)$ es el número de objetos con área A mayor que a. Barak *et al.* (1996) concluyeron que la distribución log-normal mostró mejor bondad de ajuste que la distribución fractal; pues de hecho los granos de cuarzo no muestran fisuras al magnificarlos y su superficie es suave, de manera que la geometría fractal pudiera no proveer una descripción útil para la fracción arenosa de los suelos al caracterizarla considerando el número de partículas. Inclusive, esto se ha evidenciado al corregir los errores asociados a la

discontinuidad y al supuesto de densidad uniforme en varias clases texturales (Tyler y Wheatcraft, 1992). Sin embargo, ello también pudiera indicar la pertinencia de reconocer el carácter multifractal de las partículas del suelo, es decir, que a diferentes rangos de tamaño de partículas se asocian también diferentes valores de D . En este sentido, Wu *et al.* (1993) consideraron una distribución potencial del tipo Cermak o Paretto:

$$N(r) \propto r^{-D-1} \quad (14)$$

Wu *et al.* (1993) identificaron la naturaleza multifractal de la distribución de las partículas del suelo, sobre todo porque para $r > 60 \mu\text{m}$ ($D_n \approx D_m > 3$) y $0.03 \mu\text{m} < r < 40 \mu\text{m}$ ($D_n \approx D_m = 2.8 \pm 0.1$) la distribución potencial fue claramente evidente considerando varios métodos de dispersión de las partículas en diferentes clases de suelo. Wu *et al.* (1993) reportaron que 70 % de la masa del rango de clases de partículas de suelo con D_n y/o D_m entre 2 y 3 depende de partículas grandes, mientras que 70 % del área superficial está en función de partículas relativamente pequeñas, pero los límites superior e inferior de ese rango de clases son definidos por el tipo de suelo. Por lo tanto, la cuantificación del grado de irregularidad de las superficies (Avnir *et al.*, 1984) de las partículas del suelo es importante, en particular desde un punto de vista químico.

Las reacciones químicas son tratadas, tradicionalmente, en términos de tres aspectos (Avnir *et al.*, 1994): 1) La naturaleza del enlace químico que se forma entre las moléculas en reacción, 2) las restricciones que gobiernan la asociación, y 3) el perfil energético de la reacción.

Con el advenimiento de la “Química Heterogénea” se introdujo un cuarto aspecto: La estructura y la geometría del ambiente en el cual se efectúa la reacción (Avnir *et al.*, 1994). Sin embargo, este último aspecto se ha considerado en pocas ocasiones debido a que la superficie de los materiales es caracterizada por una geometría extremadamente compleja; por ello, el concepto de “Química Heterogénea” se maneja en los casos en que las reacciones son heterogéneas porque se presentan en medios porosos de grandes áreas superficiales con superficies irregulares. El problema de la complejidad geométrica tiene dos importantes consecuencias: 1) hace difícil estudiar las relaciones eficiencia-geometría, y 2) en sentido práctico, es relativamente más sencillo caracterizar las partículas por su tamaño, el área superficial y los poros por su tamaño, lo cual

orilla a olvidarse de la importancia de caracterizar las morfologías superficiales del material reactivo.

En este contexto la geometría fractal ofrece objetos teóricos cuyo aspecto es muy similar al de los objetos reales. Por ejemplo, el objeto fractal conocido como “Escalera del Diablo” asemeja mucho los bordes de los cristales imperfectos (Mandelbrot, 1982) y de las estructuras laminares como las arcillas y los grafitos (Avnir *et al.*, 1994), mientras que el “Triángulo de Sierpinski” aleatorizado asemeja las superficies defectuosas (“trigones”) de los diamantes (Avnir *et al.*, 1994).

Debe considerarse, sin embargo, que la geometría fractal es una herramienta que contempla a la complejidad como punto de partida, no como una desviación; de manera que facilita la distinción entre al menos dos tipos de superficie que pueden o no coincidir (Avnir *et al.*, 1994): 1) la superficie disponible para que las moléculas reaccionen, y 2) la superficie que puede recibir radiación (como la de los rayos X, por ejemplo).

Es preciso aclarar que los rayos X penetran a grado tal que es factible cuantificar también la superficie totalmente inaccesible a las moléculas, como la de los poros cerrados o los poros con entradas en forma de cuello de botella. Entonces, A en la Ecuación 11 puede ser el área superficial accesible para la adsorción, el área reactiva, la intensidad de los rayos X emitidos, etc. Mientras que r en la misma Ecuación 11 pueden ser los cambios de magnificación en microscopía, el propio tamaño de los objetos, la distancia de difusión hacia la superficie, el ángulo de emisión de los rayos X, y la variación del tamaño de las moléculas que interactúan con la superficie. Por lo tanto, D podría ser la dimensión fractal de la superficie accesible para la adsorción y D_r la dimensión fractal del área que participa en la reacción.

Avnir *et al.* (1994) indicaron que si la superficie del material es fractal, el área superficial, A ($\text{m}^2 \text{g}^{-1}$), está en función del radio, r , de las partículas:

$$A \sim r^{D-3} \quad (15)$$

donde D puede ser igual a D_r y A sustituida por el área superficial efectiva de la reacción para estimar D_r , de manera que es posible que $D_r \approx D$, $D_r < D$, $D_r > D$.

$D_r \approx D$ se presenta cuando el material es prácticamente no poroso, es decir, en materiales cuya estructura es homogénea. La disolución del cuarzo es un claro

Cuadro 1. Referencias en que se reporta la caracterización de la distribución de partículas o de agregados del suelo mediante la dimensión fractal.

Referencia	Tipo de datos	Supuesto(s)	Dimensión fractal (D)†
Tyler y Wheatcraft (1989)	Distribución de partículas por tamaño	Densidad aparente de partículas invariante	2.7-3.485 (Dn)
Bartoli <i>et al.</i> (1991)	Distribución de partículas por tamaño	Densidad aparente de partículas invariante	2.69-3.26 (Dn) 2.69-3.28 (Ds) 1.9-2.02 (Dm)
Tyler y Wheatcraft (1992)	Distribución de partículas por tamaño	Densidad aparente de partículas invariante	2.682-3.499 (Dn)
Wu <i>et al.</i> (1993)	Distribución de partículas por tamaño	Densidad aparente de partículas diferente en los cuatro tipos de suelos involucrados	2.006-2.839 (Dm) 2.72-3 (Dn y Dm para radios, r, de partícula de 30 nm-60 µm) >3 (Dn y Dm; r>60 µm)
Barak <i>et al.</i> (1996)	Distribución de granos de arena por tamaño	—	1.94-2.01 (Ds igual a la dimensión topológica)
Perfect y Kay (1991)	Distribución de agregados por tamaño	Densidad aparente de agregados invariante	2.51-3.52 (Dn)
Rieu y Sposito (1991b)	Distribución de agregados por tamaño	Densidad aparente de agregados medida para cada clase de agregados por su tamaño	2.58-2.95 (Dn)
Perfect <i>et al.</i> (1992)	Distribución de agregados por tamaño	Densidad aparente de agregados invariante	0.67-3.92 (Dn)
Perfect <i>et al.</i> (1993)	Distribución de agregados por tamaño	—	0.79-4.06 (Dm) 2.53-3.46 (Dn)
Eghball <i>et al.</i> (1993)	Distribución de agregados por tamaño	Densidad aparente de agregados medida para cada clase de agregados por su tamaño	2.281-3.306 (Dn)
Rasiah <i>et al.</i> (1993)	Distribución de agregados por tamaño	Densidad aparente de agregados invariante	2.02-3.19 (Dm Rasiah) 2.32-3.28 (Dm) 2.46-2.84 (Dm Tyler)
Perfect <i>et al.</i> (1994)	Distribución de agregados por tamaño	—	1.179-2.803 (Dn) 1.818-2.663 (Dan) 1.876-2.775 (Ddan)
Perfect y Kay (1995)	Distribución de agregados por tamaño	—	-0.44-2.94 (Dm)
Anderson y McBratney (1995)	Distribución de agregados por tamaño	Densidad aparente de agregados medida para cada clase de agregados por su tamaño	2.88-2.953 (Dml)
Logsdon <i>et al.</i> (1996)	Distribución de agregados por tamaño	Densidad aparente de agregados medida para cada clase de agregados por su tamaño	2.883-2.955 (Dmn) 2.03-2.51 (Dan calculado) 2.41-2.44 (Dan contado)

† El tipo de dimensión fractal (D) se indica entre paréntesis y mediante el subíndice: s=superficial, n=con base en la distribución del número de partículas o agregados, m=con base en la distribución de la masa de las partículas o agregados, an=con base en la distribución acumulativa del número de partículas o agregados, dan=con base en la derivada de la distribución acumulativa del número de partículas o agregados, ml=Dm mediante la regresión log-log y mn=mediante un procedimiento no lineal.

ejemplo, sobre todo cuando es disuelto en HF concentrado, pues $D \sim D_{re} \sim 2.1$ (Avnir *et al.*, 1994). El que $D_{re} < D$ indica que la superficie de los microporos del material tiene poco o ningún efecto sobre la reactividad química del material. Avnir *et al.* o de la disolución de feldspatos (aluminio-silicatos naturales) en ácidos a varios niveles de pH. Casos similares seguramente ocurren sobre materiales con zonas superficiales con alta densidad de sitios de adsorción; pues por consecuencia, el tiempo de

(1994) señalaron que la disolución ácida de las piedras calizas se caracterizan por esta particularidad. $D_{re} > D$ se presenta cuando la reacción ocurre selectivamente en los microporos, tal es el caso

de residencia de las moléculas cercanas a la superficie se incrementa, así como la probabilidad de reacción. Entonces, es factible incrementar la eficiencia de dichas reacciones (Avnir *et al.*, 1994): 1) aumentando el tamaño de las partículas si $D_{re} > D$ y $[(D_{re}-3)/(D-$

3)]<1, y 2) reduciendo el tamaño de las partículas si $D < 3$ y $[(D-3)/(D-3)] > 1$.

Crawford *et al.* (1993) demostraron una relación explícita entre la trayectoria de las partículas gaseosas y la geometría del espacio poroso del suelo a través del cual los gases se difunden, al tomar en consideración que la distribución de las partículas y de los poros por su magnitud pueden ser caracterizadas por la D y sustituyendo el coeficiente de difusión constante por un término que incluye a los valores de D en la ecuación de difusión. Sokolowska (1989) caracterizó geoméricamente la irregularidad de la superficie de los poros en el suelo: Los valores de D (2.25-2.4) fueron obtenidos mediante las isotermas de adsorción de vapor de agua y desorción de nitrógeno en el suelo y se concluyó que la dimensión fractal para ambos casos es prácticamente similar.

Indudablemente, el uso de la geometría fractal en la ciencia del suelo para caracterizar las partículas, los agregados y la porosidad ha conllevado a mucha confusión, particularmente sobre el cómo debe ser estimada la correspondiente dimensión fractal y qué representa su valor. En el Cuadro 1 se aprecian valores estimados de $D > 3$, lo cual puede atribuirse, en algunos casos, a que se consideró el supuesto de invariabilidad de la forma (esférica o cúbica) y de la densidad aparente de las partículas o agregados conforme cambia su tamaño. En algunos otros casos [sobre todo los de Wu *et al.* (1993) y Perfect *et al.* (1993), quienes sí consideraron la variabilidad de la densidad con respecto al tamaño de las partículas y los agregados, respectivamente], las distribuciones con valores de $D > 3$ deberán ser consideradas distribuciones fractales porque debe aceptarse el punto de vista físico de la fragmentación de las partículas y los agregados del suelo y la multifractalidad en vez del punto de vista meramente matemático, pues de hecho el suelo es una matriz completamente fragmentada (Anderson y McBratney, 1995).

Precisamente, Eghball *et al.* (1993) cuantificaron la fragmentación de los agregados del suelo, como un indicador de la estructura, por efecto de diferentes métodos de labranza y sistemas de rotación de cultivos, mediante un análisis fractal. Ellos concluyeron que, en varios sistemas de rotación de cultivos, el cultivar maíz induce a la formación de agregados grandes, mientras que el cultivar soya provoca la disminución del tamaño

de los agregados. Al lector interesado en la aplicación de la geometría fractal en la investigación sobre labranza puede serle de gran utilidad la revisión de Perfect y Kay (1995).

Espacio poroso fractal. Katz y Thompson (1985) indicaron que la irregularidad o el incremento de la dimensión fractal que caracteriza la distribución de los poros obedece al aumento de la cementación y del grado de alteración diagenética en suelos arenosos. Por su parte, Tyler y Wheatcraft (1989) consideraron diferentes tipos de suelo por su textura y determinaron que los suelos con valores de dimensión fractal relativamente bajos se componen de partículas grandes con el consiguiente decremento significativo de partículas de tamaño pequeño; ello no es sorprendente porque, precisamente, esa característica se asocia a suelos arenosos; asimismo, indicaron que la dimensión fractal del espacio poroso expresa una medida de la tortuosidad [$D \geq 1.5$ indica un espacio poroso sumamente tortuoso (Tyler y Wheatcraft, 1989)]. En general, la dimensión fractal de la porosidad es dependiente principalmente de la textura (Pachepsky *et al.*, 1995), pues sus valores se incrementan conforme es mayor el contenido de arcilla en los suelos (Rasiah, 1995).

En el Cuadro 2 se aprecian algunas referencias en las que se aplicó la geometría fractal para caracterizar la distribución de los poros.

Al considerar que los agregados, en términos de masa, son fractales, Anderson y McBratney (1995) propusieron que el espacio poroso (ϕ) está en función de los radios medios (r_i) de las íesimas clases de poros, la dimensión fractal (D), la co-dimensión o dimensión topológica ($d=3$) característica de un cuerpo regular y la densidad de los sólidos del suelo (ρ_s), es decir,

$$\phi = 1 - [k r_i^{(D-d)} / \rho_s] \quad (16)$$

Curva característica de retención de agua. Tyler y Wheatcraft (1989) modelaron la capacidad de retención de agua del suelo como cuerpo poroso. La congruencia de los resultados del análisis fractal con el significado físico de dicho proceso edáfico permitió a Tyler y Wheatcraft (1989) concluir que el modelo de Arya y Paris tiene significado físico, particularmente la constante empírica (α); aunque un valor constante de D (equivalente al parámetro α) puede ser inapropiado a tensiones hídricas altas en el suelo porque se subestima el contenido de agua. Este resultado obedece, posiblemente, a la dificultad de

Cuadro 2. Referencias en que se reporta la caracterización de la distribución de los poros del suelo mediante la dimensión fractal.

Referencia	Características	Dimensión fractal de poros (Dp)
Katz y Thompson (1985)	Suelo arenoso	1.57-1.87
Tyler y Wheatcraft (1989)	Suelos de diferente tipo textural. Usando el método de incrementos fractales	0.7-1.485
Bartoli <i>et al.</i> (1991)	Suelos de diferente tipo textural (análisis de imagen)	1.83-2.22 (Dp igual a la D topológica)
Brakensiek <i>et al.</i> (1992)	Suelos de diferente tipo textural (análisis de imagen)	1.01-1.94
Peyton <i>et al.</i> (1994)	Suelo migajón limoso (análisis por tomografía): Usando el perímetro ----- Usando el área -----	0.99-1.89 1.07-2
Pachepsky <i>et al.</i> (1995)	Suelo migajón arcilloso y franco Usando el radio geométrico medio	2.8-2.876
Rasiah (1995)	Suelo migajón arcillo-limoso y migajón limoso. Usando el área	1.47-1.81

conocer la forma de la interface sólido-líquido a escalas muy pequeñas, es decir, la aplicación de la geometría fractal tiene limitaciones en este contexto. Ello indica que una relación no lineal entre magnitudes de poro y de partículas puede ser más apropiada y debe ser incorporada en modelos de retención y conductividad de agua en el suelo.

Otros ejemplos de la aplicación de los conceptos de geometría fractal para modelar con bases físicas la curva de retención de agua en suelos son los de Toledo *et al.* (1990), Rieu y Sposito (1991a,b) y Pachepsky *et al.* (1995). En particular, Pachepsky *et al.* (1995) concluyeron que la conductividad hidráulica a saturación (K_s) de suelos estratificados depende de la porosidad total y la dimensión fractal correspondiente a la zona por debajo de la capa arable; también definieron que el flujo de agua se incrementa conforme la dimensión fractal del espacio macroporoso (poros de 1.5 a 5 mm de diámetro) disminuye en función del aumento del número de macroporos conectados.

Cuantificación de la Heterogeneidad Espacial de Procesos Edáficos

Este aspecto de la ciencia del suelo se ha desarrollado fundamentalmente tomando como base la teoría de las variables regionalizadas o geoestadísticas, específicamente la función variograma. Dicha función se conforma por la varianza de incrementos espaciales o temporales. Entonces, considerando el supuesto de que la varianza γ de los incrementos espaciales h es representada por

$$\gamma(h) \cong h^{4-2D} \quad (17)$$

La habilidad para diferenciar (*i.e.* calcular la pendiente de la curva de un punto a otro) la función variograma o semivariograma depende en

gran parte de su linearización mediante la transformación logarítmica de las abscisas y las ordenadas (Valdez-Cepeda, 1997); posteriormente, la pendiente de la nueva línea se estima al considerar

$$\log \gamma(h) / \log h = 4 - 2D \quad (18)$$

Entonces la regresión entre \log varianza *versus* \log intervalo de separación [$\log \gamma(h)$ *versus* $\log h$] produce un estimador de la dimensión fractal D :

$$D = 2 - [1/2 \{ \log \gamma(h) / \log h \}] \quad (19)$$

Lo anterior significa que la función variograma es considerada como una función fractal estocástica del tipo Weirstrass-Mandelbrot (Valdez-Cepeda y Olivares-Sáenz, 1998), y que es posible entonces estimar el valor de la dimensión fractal para todo proceso que haya sido sometido a un análisis geoestadístico. Además, es conveniente usar la dimensión fractal como índice o parámetro de comparación entre dos o más variables (Eghball *et al.*, 1995; Valdez-Cepeda, 1997) edáficas pues su valor depende del nivel de variabilidad y es independiente de la escala y de la magnitud y/o rango de medición de las variables.

Algunas experiencias. Burrough (1981, 1983) aplicó el concepto de dimensión fractal como indicador de la autocorrelación de algunos fenómenos naturales considerando varios rangos de escala. Sus resultados sugieren que las cantidades de sodio y piedra ($D=1.7$ a 1.9 y $D=1.1$ a 1.8 , respectivamente) son muy irregulares a distancias de separación pequeñas (<15.2 m) entre sitios de muestreo de suelo superficial, pues sus variogramas son descritos por funciones no diferenciables. Resultados similares reportó para la resistencia eléctrica del suelo superficial ($D=1.4$ a 1.6), la cantidad de oro en el suelo ($D=1.9$), los niveles freáticos ($D=1.3$ a 1.8) y la cantidad de arena en el suelo ($D=1.6$ a 1.8). También,

Burrough (1981) reportó una $D=2$ para el pH del suelo; ello significa que su distribución es totalmente irregular en el espacio y que su variograma es descrito por una función no diferenciable que ocupa o llena un plano, como el fractal determinístico conocido como “Curva de Peano”.

Armstrong (1986) sugirió que la micro-topografía del suelo es un proceso fractal falso (pseudofractal) ya que al considerar escalas cada vez más pequeñas se incrementa el grado de detalle, es decir, la pendiente del variograma se incrementa y el valor de la dimensión fractal disminuye. En otras palabras, la micro-topografía del suelo es un proceso cuya forma varía cuando se cambia la escala, de manera que quizá sea necesario retomar el concepto de multifractalidad que han señalado algunos investigadores como Stanley y Meakin (1988) y Wu *et al.* (1993).

Eghball *et al.* (1995) concluyeron que tanto la aplicación de estiércol, y de diferentes cantidades de fertilizante nitrogenado, así como el no aplicar esos insumos al suelo durante un plazo largo (41 años) son acciones que no regularizan o estabilizan la variabilidad anual de los rendimientos medios en maíz, pues las dimensiones fractales obtenidas mediante las funciones variograma de los rendimientos son >1.9 . Ello significa también que la variabilidad de los rendimientos medios anuales en maíz son muy influenciados por las condiciones ambientales que varían significativamente año tras año.

Las variables conductividad eléctrica (CE) (Valdez-Cepeda, 1997), y las concentraciones de calcio (Ca) y de magnesio (Mg) en el suelo superficial (Valdez-Cepeda, 1997; Valdez-Cepeda *et al.*, 1997), como factores dominantes, de acuerdo con un análisis por componentes principales, en el espacio que ocupa una parcela comercial de maíz como monocultivo por más de 15 años, así como el rendimiento en grano se comportan irregularmente ($D>1.5$) tanto isotrópica como anisotrópicamente, de manera que las predicciones de esas variables mediante algún modelo estocástico y el interpolador kriging son imprecisas.

PERSPECTIVAS

Algunos investigadores se han enfrentado al problema de que sus resultados sugieren incongruencias con respecto a las expectativas al aplicar la geometría fractal, *i. e.* los valores de

dimensión fractal son mayores que los límites euclidianos (punto, $D=0$; línea, $D=1$; plano, $D=2$; y volumen, $D=3$). Este tipo de problemas surgen precisamente al hacer uso de alguna variante de la Ecuación $M(r) \propto Cr^D$ y/o un procedimiento de ajuste erróneos (Perfect y Kay, 1995), y de un patrón generador contrario a la naturaleza del objeto fractal final; por ejemplo, la curva de retención de humedad no es la misma si corresponde a un proceso de humedecimiento que a uno de secado, así como tampoco es lo mismo fragmentar un terrón o agregado que fomentar su conformación. Entonces es recomendable tomar precauciones con respecto a esos rubros y fundamentar los resultados con el significado mismo del proceso edáfico en estudio, pero debe tomarse en cuenta que el carácter multifractal del suelo como matriz fragmentada puede arrojar valores de $D>3$ para algunas distribuciones de partículas y agregados en escalas específicas (Anderson y McBratney, 1995). Quizá sea necesario uniformizar la naturaleza del patrón generador cuando se trate del mismo fenómeno edáfico, es decir, que ese patrón sea un proceso de incremento o de fragmentación únicamente, o bien explicar la naturaleza del fenómeno y/o el porqué de las diferencias si se usan ambos procedimientos.

Dado que en algunos suelos agrícolas tanto la distribución de las partículas y los agregados, como la geometría del espacio poroso y la propia morfología de la superficie del material reactivo pueden ser descritos mediante la geometría fractal, es conveniente su caracterización con la finalidad de hacer un uso racional y eficiente de los recursos necesarios en la producción de cosechas. De singular importancia sería, por ejemplo, caracterizar la superficie efectiva de un determinado suelo agrícola con respecto a la adsorción de nitrógeno y otros elementos fertilizante de uso generalizado para no correr los riesgos de sobre-fertilizar y la consiguiente contaminación del ambiente.

Han sido notables los esfuerzos para desarrollar modelos teóricos considerando parámetros fractales, sin embargo, son raros los esfuerzos realizados para probarlos con datos de suelos específicos, de manera que esta tarea es una oportunidad interesante.

Por lo general se reconoce que muchas de las distribuciones de variables que frecuentemente se manejan como factores limitativos de la producción son descritas adecuadamente por valores de dimensión fractal que indican un alto nivel de

irregularidad en el espacio y en el tiempo; de manera que puede ser imprescindible seguir caracterizando, mediante la aplicación de los conceptos de la geometría fractal, su comportamiento apoyándose con las geoestadísticas y con algunas otras herramientas como los análisis uni y multispectrales. Al conjuntar los resultados de Valdez-Cepeda (1997) y los de Eghball *et al.* (1995), es sugestiva la idea de que el manejo de los suelos agrícolas a largo plazo induce a un comportamiento, temporal y espacial, de algunas variables edáficas sumamente errático, y también ha sido demostrado que el del rendimiento (Burrough, 1981; Eghball *et al.*, 1995; Valdez-Cepeda, 1997) en maíz (Eghball *et al.*, 1995; Valdez-Cepeda, 1997) lo es en términos de proceso fractal. Esta idea, y el que los incrementos en la eficiencia de uso de fertilizantes debido a la aplicación variable espacialmente dependen, en gran parte, de la respuesta (de acuerdo con el principio de los rendimientos decrecientes) de las plantas cultivadas a las cantidades de fertilizante aplicado (Tanaka, 1990; Cassman y Plant, 1992) y a la varianza, sesgo (y posiblemente a la curtosis) de la variabilidad espacial de los niveles de los nutrimentos nativos en el suelo (Cassman y Plant, 1992), resultan de particular interés para la denominada "Agricultura de Precisión" o "Agricultura por Sitios Específicos" que está cobrando auge (McCauley y Whittaker, 1993; Chancellor y Goronea, 1994; Borgelt *et al.*, 1994; Auernhammer *et al.*, 1994; y Schueller y Wang, 1994). Por ejemplo, Chancellor y Goronea (1994) demostraron que las aplicaciones, a niveles bajos e intermedios, de insumos (agua, fertilizante nitrogenado y herbicida) modeladas espacialmente en la producción de trigo incrementan la eficiencia de uso de los propios insumos, permiten el ahorro de energía total en el proceso productivo e implican reducciones importantes del potencial contaminante del ambiente por efecto de los productos agroquímicos.

AGRADECIMIENTOS

R. D. Valdez-Cepeda agradece el financiamiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología mediante el contrato No. I 26976-N.

LITERATURA CITADA

Anderson, A.N. A.B. McBratney. 1995. Soil aggregates as mass fractals. *Aust. J. Soil Res.* 33: 757-772.

- Armstrong, A.C. 1986. On the fractal dimension of some transient soil properties. *J. Soil Sci.* 37: 641-652.
- Avnir, D., D. Farin y P. Pfeifer. 1984. Molecular fractal surfaces. *Nature* 308: 261-263.
- Avnir, D., D. Farin y P. Pfeifer. 1985. Surface geometric irregularity of particulate materials: The fractal approach. *J. Coll. and Interface Sci.* 103: 112-123.
- Avnir, D., R. Gutfraind y D. Farin. 1994. Fractal analysis in heterogeneous chemistry. pp. 229-255. *In: Bunde, A. y S. Havlin (Eds.). Fractals in Science.* Springer-Verlag, Berlín.
- Auernhammer, H., M. Demmel, T. Muhr, J. Rottmeier y K. Wild. 1994. GPS for yield mapping combines. *Computers and Electronics in Agriculture* 11: 53-68.
- Barak, B., C.A. Seybold y K. McSweeney. 1996. Self similitude and fractal dimension of sand grains. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 60: 72-76.
- Barnsley, M.F. 1993. *Fractals everywhere.* Academic Press Inc. 2nd Edition. Cambridge, MA, USA.
- Bartoli, F., R. Philippon, M. Dourisse, S. Niquet y M. Dubuit. 1991. Structure and self-similarity in silty and sandy soils: The fractal approach. *J. Soil Sci.* 42: 167-185.
- Borgelt, S.C., S.W. Searcy, B.A. Stout y D.J. Mulla. 1994. Spatially variable liming rates: A method for determination. *Trans. ASAE* 37: 1499-1507.
- Brakensiek, D.L., W.J. Rawls, S.D. Logsdon y W.M. Edwards. 1992. Fractal description of macroporosity. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 56: 1721-1723.
- Bunde, A. y S. Havlin. 1994. A brief introduction to fractal geometry. pp. 1-25. *In: Bunde, A. y S. Havlin (eds). Fractals in science.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, Germany.
- Burrough, P.A. 1981. Fractal dimensions of landscapes and other environmental data. *Nature* 294: 240-242.
- Burrough, P.A. 1983. Multiscale sources of spatial variation in soil. I. The application of fractal concepts to nested levels of soil variation. *J. Soil Sci.* 34: 577-597.
- Cassman, K.G. y R.E. Plant. 1992. A model to predict crop response to applied fertilizer nutrients in heterogeneous fields. *Fertilizer Res.* 31(13): 151-163.
- Chancellor, W.J. y M.A. Goronea. 1994. Effects of spatial variability of nitrogen, moisture, and weeds on the advantages of site-specific applications for wheat. *Trans. ASAE* 37: 712-724.
- Crawford, J.W., K. Ritz y Y.M. Young. 1993. Quantification of fungal morphology, gaseous transport and microbial dynamics in soil: An integrated framework utilising fractal geometry. *Geoderma* 56: 157-172.
- Eghball, B., G.D. Binford, J.F. Power, D.D. Baltensperger y F. N. Anderson. 1995. Maize temporal yield variability under long-term manure and fertilizer application: Fractal analysis. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 59: 1360-1364.
- Eghball, B., L.N. Mielke, G.A. Calvo y W.W. Wilhelm. 1993. Fractal description of soil fragmentation for various tillage methods and crop sequences. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 57: 1337-1341.
- Katz, A.J. y A.H. Thompson. 1985. Fractal sandstone pores: Implications for conductivity and pore formation. *Phys. Rev. Lett.* 54: 1325-1328.

- Logsdon, S.D., D. Gimenez y R.R. Allmaras. 1996. Fractal characterization of aggregate-size distribution: the question of scale invariance. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 60: 1327-1330.
- Mandelbrot, B.B. 1967. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* 156: 636-638.
- Mandelbrot, B. B. 1977. *Fractals: Form, chance and dimension*. W. H. Freeman & Co. London, England.
- Mandelbrot, B. B. 1982. *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman & Co. San Francisco, CA, USA. 468 p.
- Mandelbrot, B. B. 1993. *Los objetos fractales*. 3a. edición. Tusquets Editores, S. A. Barcelona, España. 213 p.
- McCauley, J. D. and A. D. Whittaker. 1993. Index for describing spatial variability in prescription farming. *Trans. ASAE* 36: 691-693.
- Orbach, R. 1986. Dynamics of fractal networks. *Science* 231: 814-819.
- Pachepsky, Ya. A., R. A. Shchervakov and L. P. Korsunskaya. 1995. Scaling of soil water retention using a fractal model. *Soil Sci.* 159(2): 99-104.
- Perfect, E. and B. D. Kay. 1991. Fractal theory applied to soil aggregation. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 55: 1552-1558.
- Perfect, E. and B. D. Kay. 1995. Applications of fractals in soil and tillage research: A review. *Soil & Tillage Research* 36: 1-20.
- Perfect, E., B. D. Kay and V. Rasiah. 1993. Multifractal model for soil aggregate fragmentation. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 57: 896-900.
- Perfect, E., B. D. Kay and V. Rasiah. 1994. Unbiased estimation of the fractal dimension of soil aggregate size distributions. *Soil & Tillage Research* 31: 187-198.
- Perfect, E., V. Rasiah and B. D. Kay. 1992. Fractal dimensions of soil aggregate-size distributions calculated by number and mass. *Soil Sc. Soc. Am. J.* 56: 1407-1409.
- Peterson, I. 1984. Ants in labyrinths and other fractal excursions. *Science News* (January 21th): 42-43.
- Peyton, R. L., C. J. Gantzer, S. H. Anderson, B. Haefner and P. Pfeifer. 1994. Fractal dimension to describe soil macropore structure using ray computed tomography. *Water Resources Res.* 30: 691-700.
- Rasiah, V. 1995. Fractal dimension of surface-connected macropore count-size distributions. *Soil Sci.* 159(2): 105-108.
- Rasiah, V., B. D. Kay and E. Perfect. 1993. New mass-based model for estimating fractal dimensions of soil aggregates. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 57: 891-895.
- Rieu, M. and G. Sposito. 1991a. Fractal fragmentation, soil porosity and soil water properties: I. Theory. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 55: 1231-1238.
- Rieu, M. and G. Sposito. 1991b. Fractal fragmentation, soil porosity and soil water properties: II. Applications. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 55: 1239-1244.
- Sander, L. M. 1986. Fractal growth processes. *Nature* 322: 789-793.
- Schueller, J. K. and Ming-Wen Wang. 1994. Spatially-variable fertilizer and pesticide application with GPS and DGPS. *Computers and Electronics in Agriculture* 11: 69-83.
- Sokolowska, Z. 1989. On the role of energetic and geometric heterogeneity in sorption of water vapour by soils: Application of a fractal approach. *Geoderma* 45: 251-265.
- Stanley, H. E. and P. Meakin. 1988. Multifractal phenomena in physics and chemistry. *Nature* 335: 405-409.
- Tanaka, D. L. 1990. Topsoil removal influences on spring wheat water-use efficiency and nutrient concentration and content. *Transactions of the ASAE* 33(5): 1518-1524.
- Toledo, P. G., R. A. Novy, H. T. Davis and L. E. Scriven. 1990. Hydraulic conductivity of porous media at low water content. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 54: 673-679.
- Tyler, S. W. and S. W. Wheatcraft. 1989. Application of fractal mathematics to soil water retention estimation. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 53: 987-996.
- Tyler, S. W. and S. W. Wheatcraft. 1992. Fractal scaling of soil particle-size distributions: Analysis and limitations. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 56: 362-369.
- Turcotte, D. L. 1986. Fractals and fragmentation. *J. Geophys. Res.* 91(B2): 1921-1926.
- Valdez-Cepeda, R. D. 1997. *Análisis estocástico espacial de procesos edáficos y de plantas en Zea mays L.* Tesis de Doctor en Ciencias. Universidad Autónoma de Nuevo León-Facultad de Agronomía. Marín, N. L., México. 91 p.
- Valdez-Cepeda, R. D. and E. Olivares-Sáenz. 1998. Fractal analysis of the Mexico's annual mean yields of maize, bean, wheat and rice. *Field Crops Research* (in press).
- Valdez-Cepeda, R. D., E. Olivares-Sáenz, F. Zavala-García, M. Luna-Flores, R. E. Vázquez-Alvarado y J. F. Pissani-Zuñiga. 1997. *Análisis fractal de los factores nutricionales dominantes en la producción de maíz en el Norte de Tamaulipas, México.* Memorias del XXVIII Congreso Nacional de la Ciencia del Suelo. Villahermosa, Tabasco, México. p. 87.
- Wu, Q., M. Borkovec and H. Sticher. 1993. On particle-size distributions in soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 57: 883-890.
- Young, I. M. and J. W. Crawford. 1991. The fractal structure of soil aggregates: Its measurement and interpretation. *J. Soil Sci.* 42: 187-192.